Language: Uzbek

Payshanba, 27-iyun, 2024-yil

Masala 1. a, b, c musbat haqiqiy sonlari uchun

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, quyidagi tengsizlikni isbotlang:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Masala 2. ABC uchburchakda $AB < AC$. Ushbu uchburchakning A uchi qarshisidagi ichki-tashqi aylanasi AB, AC va BC tomonlarga mos ravishda D, E va F nuqtalarda urunadi va J nuqta ushbu aylananing markazi. P nuqta BC tomonda olingan. BDP va CEP uchburchaklarning tashqi aylanalari ikkinchi marta Q nuqtada kesishadi. R nuqta A nuqtadan FJ to'g'ri chiziqqa tushurilgan perpendikular asosi bo'lsin. P, Q va R nuqtalar bir chiziqda yotishini isbotlang.

(ABC uchburchakning A uchi qarshisidagi *ichki-tashqi aylanasi* BC kesmaga, AB nurning B tarafdan davomiga, va AC nurning C tarafdan davomiga urinadi.)

Masala 3. Quyidagi tenglikni qanoatlantiradigan barcha (x, y, z) natural sonlar uchligini toping:

$$2020^x+2^y=2024^z.$$

Masala 4. Uchta do'st Archie, Billie va Charlie o'yin o'ynashmoqda. O'yin boshlanishidan oldin ularning har birida 2024 tadan tosh bor edi. Archie birinchi bo'lib yurish qiladi, Billie ikkinchi bo'lib yurish qiladi, Charlie esa uchinchi bo'lib yurish qiladi va ular shu tartibda yurish qilishda davom etishadi. Har bir qadamda, o'yinchi yurish qilish uchun n natural sonini tanlaydi, bunda ushbu tanlanayotgan son ilgari ixtiyoriy o'yinchi tomonidan tanlangan ixtiyoriy sondan katta bo'lishi kerak. Son tanlab bo'lgan o'yinchi o'zining toshlaridan $2n$ tasini ikkita do'stiga teng miqdorda bo'lib beradi. Agar o'yinchi yurish qila olmasa yutqazadi va shu joyda o'yin tugaydi.

Do'stlari qanday o'yin olib borishiga qaramay yutqazmaslik strategiyasiga ega bo'lgan o'yinchini va u foydalanadigan strategiyani aniqlang.

Ajratilgan vaqt 4 soat, 30 minut
Har bir masala uchun 10 ball ajratilgan