Perşembe, 27 Haziran 2024

Soru 1. a, b, c pozitif gerçel sayıları

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}$$

eşitliğini sağlıyor.

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

olduğunu gösteriniz.

Soru 2. Bir ABC üçgeninde $|AB|<|AC|$ olsun. A köşesinin karşısındaki dışteğet çemberi AB, AC ve BC kenarlarına sırasıyla D, E ve F noktalarında teğettir ve bu çemberin merkezi J olsun. P, BC kenarı üzerinde bir nokta olsun. BDP ve CEP üçgenlerinin çevrel çemberleri ikinci kez Q noktasında kesişiyor. A noktasından FJ doğrusuna indirilen dikme ayağı R olsun. P, Q ve R noktalarının doğrusal olduğunu gösteriniz.

(ABC üçgeninin A köşesinin karşısındaki *dış teğet çemberi*; BC doğru parçasına, B'nin ötesinde AB ışınına ve C'nin ötesinde AC ışınına teğet olan çemberdir.)

Soru 3.

$$2020^x+2^y=2024^z$$

denklemini sağlayan tüm (x,y,z) pozitif tam sayı üçlülerini bulunuz.

Soru 4. 3 arkadaş olan Ali, Betül ve Can bir oyun oynuyor. Oyun başladığında her birinin önünde 2024 taştan oluşan taş öbekleri bulunuyor. İlk hamleyi Ali, ikinci hamleyi Betül, üçüncü hamleyi Can yapıyor ve sonrasında aynı sıra ile hamlelerini yapmaya devam ediyorlar. Her hamlede sırası gelen oyuncu daha önceden herhangi bir oyuncu tarafından seçilmiş sayılardan daha büyük bir n pozitif tam sayısı seçiyor, kendi öbeğinden $2n$ adet taşı alıyor ve bu taşları diğer iki oyuncuya eşit miktarda paylaştırıyor. Bir oyuncu sırası geldiğinde hamle yapamazsa oyun bitiyor ve bu oyuncu oyunu kaybediyor.

Diğer iki oyuncu nasıl oynarsa oynasın, oyunu kaybetmemeyi garantileyen stratejisi olan oyuncuları bulunuz.

Süre 4 saat 30 dakikadır.
Her soru 10 puan değerindedir.