Language: Serbian

Четвртак, 27. јун 2024.

Задатак 1. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Докажи да важи

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Задатак 2. Нека је ABC троугао такав да је $AB < AC$. Спoља уписана кружница тог троугла наспрам темена A, са центром J, додирује праве AB, AC и BC у тачкама D, E и F, редом. Нека је P произвољна тачка странице BC. Описане кружнице троуглова BDP и CEP секу се по други пут у тачки Q. Означимо са R подножје нормале из тачке A на праву FJ. Докажи да су тачке P, Q и R колинеарне.

(Споља уписана кружница троугла ABC наспрам темена A је кружница која додирује страницу BC, продужетак странице AB преко B и продужетак странице AC преко C.)

Задатак 3. Одреди све тројке (x, y, z) природних бројева који задовољавају једначину

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

Задатак 4. Три друга Аца, Бане и Цане играју игру. На почетку игре, свако од њих има гомилу од 2024 каменчића. Аца игра први, Бане други, Цане трећи и затим настављају игру тим редоследом. У сваком потезу, играч бира природан број n који је већи од свих до тада одабраних бројева свих играча, узима $2n$ каменчића са своје гомиле и расподељује их једнако осталим играчима, по n обојици. Уколико играч не може да одигра потез, игра се завршава и он губи.

Одреди све играче који имају стратегију која им гарантује да неће изгубити у овој игри, без обзира како преостала два играча играју.

Време за рад: 4 сата и 30 минута

Сваки задатак вреди 10 бодова