Language: Russian

27 июня 2024 года, четверг

Задача 1. Положительные вещественные числа a, b, c удовлетворяют соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Докажите неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Задача 2. Для сторон треугольника ABC справедливо неравенство $AB < AC$. Вневписанная окружность с центром J касается продолжений сторон AB, AC и стороны BC в точках D, E и F, соответственно. Точка P лежит на стороне BC. Окружности, описанные около треугольников BDP и CEP, вторично пересекаются в точке Q. Обозначим через R основание перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую FJ. Докажите, что точки P, Q и R лежат на одной прямой.

Задача 3. Решите уравнение

$$2020^x + 2^y = 2024^z$$

в положительных целых числах (x, y, z).

Задача 4. Алим, Баха и Уали играют в следующую игру. Изначально у каждого есть по 2024 орешка. Алим делает первый ход, Баха - второй, Уали - третий. Далее они ходят по очереди в указанном порядке. Ход состоит в том, что игрок должен выбрать положительное целое четное число $2n$, большее любого из положительных целых четных чисел, уже выбранных им или другими игроками, взять у себя $2n$ своих орешков и разделить их поровну между двумя остальными игроками. Если какой-то игрок не может сделать ход - он проигрывает, а игра тотчас заканчивается.

Укажите (с полным обоснованием) всех игроков, у которых имеется стратегия, позволяющая им не проиграть, как бы ни играли другие.

Время: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается в 10 баллов