Language: Romanian

Joi, 27 iunie 2024

Problema 1. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Arătaţi că

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Problema 2. Fie ABC un triunghi astfel încât $AB < AC$. Notăm cu J centrul cercului $A-$exînscris şi cu D, E, F punctele de tangenţă ale acestui cerc cu dreptele AB, AC, respectiv BC. Fie P un punct pe latura BC. Cercurile circumscrise triunghiurilor BDP şi CEP se intersectează a doua oară în Q. Fie R piciorul perpendicularei din A pe dreapta FJ. Arătaţi că punctele P, Q şi R sunt coliniare.

(Cercul $A-$*exînscris* unui triunghi ABC este cercul tangent laturii BC, semidreptei AB – dar nu laturii AB – şi semidreptei AC – dar nu laturii AC.)

Problema 3. Determinaţi toate tripletele (x, y, z) de numere naturale nenule care verifică egalitatea

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

Problema 4. Trei prieteni, Adrian, Bogdan şi Cristian joacă un joc. La început, fiecare dintre ei are câte o grămadă de 2024 de pietricele. Adrian face prima mutare, Bogdan a doua, Cristian a treia, apoi ei continuă să facă mutări în aceeaşi ordine. La fiecare mutare, jucătorul care efectuează mutarea trebuie să aleagă un număr natural nenul n, mai mare decât toate numerele alese anterior de orice jucător, să ia $2n$ pietricele din grămada lui şi să le distribuie în mod egal celorlalţi jucători. Dacă un jucător nu poate muta, jocul se termină şi acel jucător pierde jocul.

Determinaţi jucătorii care au o strategie astfel încât să nu piardă jocul, indiferent cum joacă ceilalţi jucători.

Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute.
Fiecare problemă se notează cu 10 puncte.