Language: Montenegrin

*Četvrtak, 27. Jun 2024.*

**Zadatak 1.** Neka su $a$, $b$, $c$ pozitivni realni brojevi takvi da važi

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Dokazati da važi

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

**Zadatak 2.** Neka je $ABC$ trougao takav da je $AB < AC$. Neka pridružena kružnica suprotna tjemenu $A$ dodiruje prave $AB$, $AC$ i $BC$ u tačkama $D$, $E$ i $F$, respektivno, i neka je $J$ centar te kružnice. Neka je $P$ proizvoljna tačka na stranici $BC$. Opisane kružnice trouglova $BDP$ i $CEP$ se drugi put sijeku u tački $Q$. Neka je $R$ podnožje normale iz tjemena $A$ na pravu $FJ$. Dokazati da su tačke $P$, $Q$ i $R$ kolinearne.

(*Pridružena kružnica* trougla $ABC$ suprotna tjemenu $A$ je kružnica koja dodiruje stranicu $BC$, produžetak stranice $AB$ preko $B$, i produžetak stranice $AC$ preko $C$.)

**Zadatak 3.** Naći sve trojke $(x, y, z)$ prirodnih brojeva koji zadovoljavaju jednačinu

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

**Zadatak 4.** Tri prijatelja Aleksandar, Branko i Cane igraju igru. Na početku igre, svaki od njih ima gomilu sa 2024 kamenčića. Aleksandar pravi prvi potez, Branko drugi, Cane treći i nastavljaju da prave poteze istim redosljedom. U svakom potezu, igrač koji pravi potez mora izabrati pozitivan prirodan broj $n$ veći od svakog prethodno izabranog broja svih igrača, uzeti $2n$ kamenčića sa svoje gomile i raspodijeliti ih jednako ostalim igračima, po $n$ obojici. Ako igrač ne može da napravi potez, igra se završava i on gubi igru.

Odrediti sve igrače koji imaju strategiju takvu da neće izgubiti igru, nezavisno od toga kakve poteze prave ostali igrači.

Takmičenje traje 4 sata 30 minuta
Svaki zadatak se boduje sa najviše 10 bodova