Language: Macedonian

Четврток, Јуни 27, 2024

Задача 1. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}.$$

Докажи дека

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Задача 2. Нека ABC е триаголник таков што $AB < AC$. Припишаната кружница спроти темето A со центар во точката J ги допира правите AB, AC и BC во точките D, E и F, соодветно. Нека P е произволна точка од страната BC. Опишаните кружници околу триаголниците BDP и CEP по втор пат се сечат во точката Q. Точката R е подножје на висината повлечена од темето A кон правата FJ. Докажи дека точките P, Q и R се колинеарни.

(Припишана кружница за триаголникот ABC спроти темето A е кружница која што ги допира полуправите AB и AC (после B и C, соодветно) и ја допира страната BC.

Задача 3. Одреди ги сите тројки од позитивни цели броеви (x, y, z) за кои што важи равенството

$$2020^x+2^y=2024^z.$$

Задача 4. Тројца другари Аце, Блаже и Цане играат игра. На почетокот на играта сите имаат по 2024 камчиња. Играта ја почнува Аце, Блаже игра втор, а Цане трет и играта продолжува во тој редослед. Во секој потег, играчот бира природен број n кој е поголем од сите броеви кои до тогаш се одбрани од секој од играчите, зема $2n$ камчиња од неговото купче и ги префрла на останатие играчи по n камчиња на секој. Ако играчот не може да направи потег, играта завршува и тој играч ја губи играта.

Одреди кои од играчите имаат стратегија со која како и да играат другите играчи тој не губи.

Време за работа 4 часа и 30 минути

Секоја задача се вреднува со 10 поени