Language: Greek

Πέμπτη, 27 Ιουνίου, 2024

Πρόβλημα 1. Έστω a, b, c θετικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}.$$

Να αποδείξετε ότι

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Πρόβλημα 2. Δίνεται ένα τρίγωνο ABC με $AB<AC$. Έστω ότι ο παρεγγεγραμμένος κύκλος απέναντι από το A εφάπτεται στις ευθείες AB, AC και BC στα σημεία D, E και F, αντίστοιχα, και έστω J το κέντρο του. Έστω P ένα σημείο στην πλευρά BC. Οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων BDP και CEP τέμνονται για δεύτερη φορά στο Q. Έστω R το ίχνος της καθέτου από το A στην ευθεία FJ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία P, Q και R είναι συνευθειακά.

(Ο *παρεγγεγραμμένος κύκλος* ενός τριγώνου ABC απέναντι από το A είναι ο κύκλος που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα BC, στην ημιευθεία AB προς το B, και στην ημιευθεία AC προς το C.)

Πρόβλημα 3. Να βρείτε όλες τις τριάδες θετικών ακέραιων αριθμών (x, y, z) που ικανοποιούν την εξίσωση

$$2020^x+2^y=2024^z.$$

Πρόβλημα 4. Τρεις φίλοι, ο Αργύρης, ο Βαγγέλης και ο Γιάννης, παίζουν ένα παιχνίδι. Στην αρχή του παιχνιδιού, καθένας από αυτούς έχει μια στοίβα από 2024 βώλους. Ο Αργύρης κάνει την πρώτη κίνηση, ο Βαγγέλης κάνει τη δεύτερη, ο Γιάννης κάνει την τρίτη, και συνεχίζουνε να κάνουν κινήσεις με την ίδια σειρά. Σε κάθε κίνηση, ο παίκτης που κάνει την κίνηση, πρέπει να επιλέξει έναν θετικό ακέραιο n μεγαλύτερο από οποιονδήποτε αριθμό έχει επιλεγεί έως τότε από οποιονδήποτε παίκτη, να πάρει $2n$ βώλους από τη στοίβα του, και να τους μοιράσει ισομερώς στους άλλους δύο παίκτες. Αν ένας παίκτης δεν μπορεί να κάνει μια κίνηση, το παιχνίδι τελειώνει και αυτός ο παίκτης χάνει.

Να προσδιορίσετε όλους τους παίκτες που έχουν τέτοια στρατηγική ώστε να μην χάσουν, ανεξάρτητα από το πως παίζουν οι άλλοι δύο παίκτες.

Διάρκεια: 4 ώρες και 30 λεπτά
Κάθε πρόβλημα βαθμολογείται με 10 μονάδες