Language: French

Jeudi 27 juin 2024

Problème 1. Soit a, b et c des réels strictement positifs tels que

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Démontrer que

$$\sqrt{\frac{1}{b^2 + c^2}} + \sqrt{\frac{1}{c^2 + a^2}} + \sqrt{\frac{1}{a^2 + b^2}} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Problème 2. Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$. Le cercle exinscrit opposé à A est tangent aux droites (AB), (AC) et (BC) en trois points que l'on appelle respectivement D, E et F ; on note J le centre de ce cercle. Soit P un point situé sur le côté $[BC]$. Les cercles circonscrits aux triangles BDP et CEP se recoupent en un point que l'on note Q. Enfin, soit R le point de la droite (FJ) pour lequel (AR) est perpendiculaire à (FJ). Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.

(Le cercle *exinscrit* du triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.)

Problème 3. Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (x, y, z) tels que

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

Problème 4. Anna, Bianca et Clara jouent à un jeu. Quand la partie démarre, chacune dispose d'une pile contenant 2024 jetons. Anna joue lors du premier tour, Bianca lors du second tour, Clara lors du troisième tour, et elles continuent à jouer chacune à son tour, dans cet ordre. À chaque tour, la joueuse dont c'est le tour doit choisir un entier $n \geqslant 1$ strictement plus grand que tous les entiers choisis auparavant (par n'importe laquelle des trois joueuses), prendre $2n$ jetons de sa pile, et les distribuer à parts égales aux deux autres joueuses (qui reçoivent donc n jetons chacune). Si cela lui est impossible, la partie s'arrête, et elle perd la partie.

Trouver chaque joueuse qui dispose d'une stratégie lui permettant de ne pas perdre la partie quelle que soit la façon dont joueront les deux autres joueuses.

Durée : 4 heures et 30 minutes.
Chaque problème est noté sur 10 points.