Language: Croatian

*četvrtak, 27. lipnja 2024.*

---

**Zadatak 1.** Neka su $a$, $b$, $c$ pozitivni realni brojevi za koje vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Dokaži da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

**Zadatak 2.** Neka je $ABC$ trokut u kojem vrijedi $|AB| < |AC|$. Tom trokutu pripisana kružnica nasuprot vrha $A$ dira pravce $AB$, $AC$ i $BC$ u točkama $D$, $E$ i $F$, redom, te je točka $J$ njezino središte. Neka je točka $P$ dana na dužini $\overline{BC}$. Kružnice opisane trokutima $BDP$ i $CEP$ sijeku se drugi put u točki $Q$. Točka $R$ je nožište okomice kroz $A$ na pravac $FJ$. Dokaži da su točke $P$, $Q$ i $R$ kolinearne.

(*Pripisana kružnica* trokuta $ABC$ nasuprot vrha $A$ je kružnica koja dodiruje stranicu $\overline{BC}$ i produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$.)

**Zadatak 3.** Odredi sve trojke prirodnih brojeva $(x, y, z)$ za koje vrijedi

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

**Zadatak 4.** Tri prijatelja Antun, Branko i Šime igraju igru. Na početku igre svaki od njih ima hrpu s 2024 kamenčića. Antun prvi povlači potez, Branko drugi, Šime treći te nastavljaju povlačiti poteze tim redom. U svakom potezu, igrač koji povlači potez mora odabrati prirodan broj $n$ veći od svih prethodno odabranih brojeva bilo kojeg igrača, uzeti $2n$ kamenčića sa svoje hrpe i raspodijeliti ih ravnomjerno preostaloj dvojici igrača, po $n$ svakome. Ako neki igrač ne može povući potez, igra završava i taj igrač gubi.

Odredi sve igrače koji imaju strategiju koja im osigurava da neće izgubiti bez obzira na poteze drugih igrača.

---

Vrijeme rješavanja je 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 10 bodova