Language: Bulgarian

Четвъртък, 27 юни, 2024

Задача 1. Нека a, b, c са положителни реални числа, такива че

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Да се докаже, че

$$\frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2 + a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{\sqrt{2}}{(a + b)(b + c)(c + a)}.$$

Задача 2. Нека ABC е триъгълник с $AB < AC$. Външновписаната окръжност срещу върха A се допира до правите AB, AC и BC в точките D, E и F, съответно, а J е нейният център. Нека P е произволна точка от страната BC. Описаните окръжности около триъгълниците BDP и CEP се пресичат за втори път в Q. Нека R е петата на перпендикуляра от A към правата FJ. Да се докаже, че точките P, Q и R лежат на една права.

(Външновписаната окръжност на триъгълник ABC срещу върха A е окръжността, която се допира до отсечката BC, до лъча AB след B и до лъча AC след C.)

Задача 3. Намерете всички тройки от естествени числа (x, y, z), такива че

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

Задача 4. Трима приятели Али, Баба и Сашко играят игра. В началото на играта всеки от тях има по една купчина от 2024 камъчета. Али прави първия ход, Баба прави втория, Сашко прави третия и след това продължават да правят ходове, редувайки се в същия ред. Във всеки ход играчът трябва да избере естествено число n, по-голямо от всяко избрано число от който и да е играч на предишен ход, да вземе $2n$ камъчета от купчината си и да ги раздаде поравно на другите двама играчи, по n за всеки. Ако някой играч не може да направи ход, играта приключва и този играч губи.

Определете всички играчи, които имат стратегия, с която няма как да загубят без