اللغة: العربية

الخميس 27 يونيو 2024

السؤال الأول

لتكن a,b,c ثلاثة أعداد حقيقية موجبة، تحقق المعادلة:

$$a^2+b^2+c^2=\frac{1}{4}$$

أثبت أن:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}}+\frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}}+\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\le\frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

السؤال الثاني

المثلث ABC فيه $AB<AC$. الدائرة الخارجية للمثلث ABC المقابلة للرأس A، والتي مركزها النقطة J، تمس المستقيمات AB,AC,BC عند النقاط D,E,F، على الترتيب. لتكن P نقطة على الضلع BC. الدائرتان المحيطتان بالمثلثين BDP,CEP تتقاطعان مرة أخرى في النقطة Q. لتكن النقطة R هي المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم FJ. أثبت أن النقاط الثلاث P,Q,R على استقامة واحدة.

[الدائرة الخارجية للمثلث ABC المقابلة للرأس A هي الدائرة التي تمس الضلع BC وامتداد الضلع AB من جهة B وامتداد الضلع AC من جهة C]

السؤال الثالث

أوجد جميع الثلاثيات المرتبة (x,y,z) من الأعداد الصحيحة الموجبة التي تحقق المعادلة:

$$2020^x+2^y=2024^z$$

السؤال الرابع

يلعب الأصدقاء الثلاثة، أسعد وبلال وشاكر لعبة. في بداية اللعبة، كل منهم يملك 2024 كرة. يقوم أسعد بحركة اللعب أولاً، ثم يلعب بلال حركة اللعب ثانياً، ثم شاكر ثالثاً، وسوف يستمر الثلاثة باللعب بهذا الترتيب حتى نهاية اللعبة. في كل حركة لعب، يجب على اللاعب الذي عليه الدور، أن يختار عدداً صحيحاً موجباً n بشرط أن يكون أكبر من جميع الأعداد التي تم اختيارها سابقا من أي لاعب، ثم عليه أن يأخذ $2n$ كرة من كومته ويوزعها بالتساوي على اللاعبين الآخرين. إذا لم يستطع أحد اللاعبين أن يقوم بهذه الحركة في دوره تنتهي اللعبة ويخسر هذا اللاعب.

حدد جميع اللاعبين الذين لديهم استراتيجية تضمن عدم خسارتهم، بغض النظر عن طريقة لعب بقية اللاعبين.

مدة الاختبار 4 ساعات و30 دقيقة

كل سؤال له 10 درجات