Language: Albanian

E enjte, 27 Qershor 2024

Problem 1. Le të jenë a, b, c numra realë pozitivë të tillë që:

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{4}.$$

Vërtetoni se:

$$\frac{1}{\sqrt{b^2+c^2}} + \frac{1}{\sqrt{c^2+a^2}} + \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \le \frac{\sqrt{2}}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Problem 2. Le të jetë ABC një trekëndësh i tillë që $AB < AC$. Rrethi i anëshkruar këtij trekëndëshi përballë A, takon drejtëzat AB, AC dhe BC përkatësisht në pikat D, E dhe F, si dhe le të jetë J qendra e këtij rrethi. Le të jetë P një pikë në brinjën BC. Rrathët e jashtëshkruar trekëndëshave BDP and CEP priten në pikën $Q \neq P$. Le të jetë R këmba e pingules së hequr nga A në drejtëzën FJ. Vërtetoni se pikat P, Q dhe R janë në një drejtëz.

(Rreth i *anëshkruar* i një trekëndëshi ABC përballë A është rrethi që është tangjent me brinjën BC, si dhe me zgjatimin e drejtëzës AB përtej B, dhe me zgjatimin e drejtëzës AC përtej C.)

Problem 3. Gjeni të gjithë treshet e numrave të plotë pozitivë (x, y, z) që plotësojnë ekuacionin:

$$2020^x + 2^y = 2024^z.$$

Problem 4. Tre shokë Archie, Billie dhe Charlie po luajnë një lojë. Në fillim të lojës, secili prej tyre ka nga një grumbull me 2024 guralecë. Archie luan i pari, Billie luan i dyti, Charlie luan i treti e kështu vazhdojnë lëvizjet sipas kësaj radhe. Në secilën lëvizje, lojtari që ka radhën duhet të zgjedhë një numër natyror n , i cili duhet të jetë më i madh se çdo numër i zgjedhur më parë nga ndonjë lojtar, si dhe heq $2n$ guralecë nga grumbulli i vet duke ia shperndarë nga n guralecë secilit prej dy lojtarëve të tjerë. Nëse lojtari që ka radhën, nuk ka mjaftueshëm guralecë për të bërë lëvizjen, loja mbaron dhe ai është humbësi. Gjeni cilët nga lojtarët kanë strategji për të mos dalë humbës pavarësisht si luajnë dy lojtarët e tjerë?

Koha: 4 orë e 30 minuta

Secili problem është 10 pikë